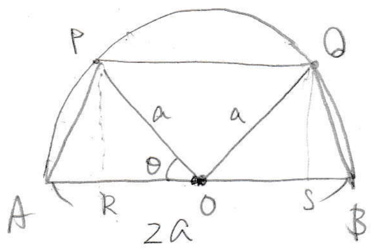
3Cmn18

ABを直径とする定半円周上の動点Pから, ABに平行な弦PQを引くとき, 台形PABQが作られたとする。この台形の面積が最大となるのはどんな場合か。また, その最大値を求めよ。ただし, AB$= 2a$とする。



半円の中心をOとし

$\angle AOP = \angle BOQ = \theta$ とし

P, Qからそれぞれ ABにおろした

垂線のあしを R, Sとする

このとき

$RO = SO = a\cos\theta$

より $PQ = 2a\cos\theta$, また $PR = a\sin\theta$ であるから

台形の面積 $f(\theta)$ は

$$f(\theta) = (2a + 2a\cos\theta)\cdot a\sin\theta \times \frac{1}{2} \quad \because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$f(\theta) = a^2\sin\theta\cdot(1+\cos\theta)$$

$$f'(\theta) = a^2\cos\theta(1+\cos\theta) - a^2\sin^2\theta$$

$$= a^2\cos\theta + a^2\cos\theta - a^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= 2a^2\cos\theta + a^2\cos\theta - a^2$$

$$= a^2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

$\cos\theta = \frac{1}{2}, -1$ となりこのとき θ はそれぞれ $\frac{\pi}{3}, \pi$ である

が $\theta = \pi$ は問題に合わない よって $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大となり

その値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 増減表は左下のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	↘	

以上より $\angle PAS = \angle QBA = 60^\circ$ の台形になるときが最大