3cmm19

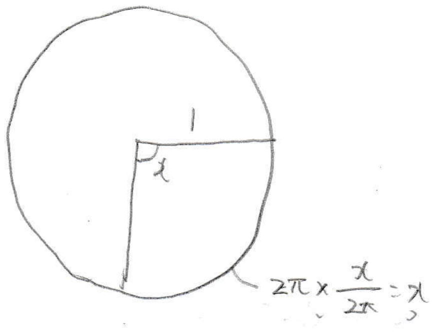
半径1の円板から中心角 x の扇形を切りとり円すいをつくる。このとき, 次の問いに答えよ。

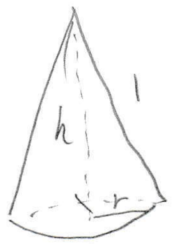
(1) その容積 V を x の関数として表わせ。

(2) V を最大にするには, どのように切りとればよいか。

〔摂南大〕

(1)





$2\pi r = x$

$r = \frac{x}{2\pi}$

$h = \sqrt{1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$　　$r = \frac{x}{2\pi}$ より　　中心角は x ラジアンとする

$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$

$= \frac{1}{12\pi}x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$　　$\therefore \underline{V = \frac{1}{12\pi}x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}\quad (\because\ 0<x<2\pi)}$

(2)

(1)において　V の最大値を求めるには

$V(x) = x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$ の極大値を求めるとより

$V(x) = x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4\pi^2}} = \sqrt{x^4-\frac{x^6}{4\pi^2}}$

$V'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4x^3-\frac{3x^5}{2\pi^2}}{\sqrt{x^4-\frac{x^6}{4\pi^2}}} = \frac{8\pi^2x^3-3x^5}{4\pi^2\sqrt{x^4-\frac{x^6}{4\pi^2}}}$

$V'(x)=0$ とすると　$x^3(8\pi^2-3x^2)=0$　　$x\neq 0$ より

$3x^2 = 8\pi^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$　　$x>0$ より　$x=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ のとき極値をとる

x	0	…	$\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$	…	2π
$V'(x)$	/	+	0	−	/
$V(x)$	/	↗	極大	↘	/

増減表をかくと左のようになり

中心角を $\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ ラジアンで切りとるとき V は最大になる