3Cmm21

$0 < x < \pi$ における関数 $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$ の最小値を求めよ。〔姫路工大〕

$f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$

$e^x > 0$ より $\sin x = \cos x$ のとき極値をとる

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$2\sin^2 x = 1$ 　$0 < x < \pi$ であるから $\sin x > 0$

$\therefore \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 　このとき $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

つまり $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき極値をとる　増減表をかくと以下のようになり

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}}$

$\therefore$ $f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき

最小値 $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}}$ をとる