$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+4}$ を最小にする x の値は $\boxed{}$ である。　〔東北学院大〕

$$f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+\{(x-3)^2+4\}^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+\frac{1}{2}\{(x-3)^2+4\}^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(x-3)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

$$=\frac{x\sqrt{(x-3)^2+4}+(x-3)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

ここで $f'(x)=0$ とおくと

$$x\sqrt{(x-3)^2+4}+(x-3)\sqrt{x^2+1}=0$$

$x\sqrt{(x-3)^2+4}=-(x-3)\sqrt{x^2+1}$ として両辺2乗すると …①

$$x^2\{(x-3)^2+4\}=(x-3)^2(x^2+1)$$

$$\cancel{x^2(x-3)^2}+4x^2=\cancel{x^2(x-3)^2}+(x-3)^2$$

$$4x^2=x^2-6x+9$$

$$3x^2+6x-9=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

∴ $x=-3, 1$ であるが

ただし $x=-3$ は ① を満たさない！

従って $x=1$ のときに $f(x)$ は極値をとる.

x	…	1	…	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘	$3\sqrt{2}$	↗	∞

増減表より $f(x)$ は $x=1$ のとき極小かつ最小値をもつ

$x=1$