30min 23

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ なる範囲の $x$ に対して, $g(x) = \dfrac{2\cos x - \sin x}{1 - \sin x}$ の最大値 $M$ と, そのときの $\sin x$ の値を求めよ。〔東京理科大〕

$$g(x) = \frac{(-2\sin x - \cos x)(1-\sin x) + \cos x(2\cos x - \sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-2\sin x + 2\sin^2 x - \cos x + \cancel{\sin x\cos x} + 2\cos^2 x - \cancel{\sin x\cos x}}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{2 - 2\sin x - \cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$g'(x)=0$ とおくと　$2 - 2\sin x - \cos x = 0$

$\cos x = 2(1-\sin x)$ 両辺2乗し

$\cos^2 x = 4(1-\sin x)^2$ より $1 - \sin^2 x = 4(1 - 2\sin x + \sin^2 x)$ となり

整理すると　$5\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

$(\sin x - 1)(5\sin x - 3) = 0$　　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ であるから

$\sin x = \frac{3}{5}$　このとき $\cos x = \frac{4}{5}$ で極値をとる。このときの $x$ を $\alpha$ として

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ | $\searrow$ | $\sqrt{2}+1$ |

増減表をかくと左図のようになるので

$\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ のとき

最大値 $M = \frac{5}{2}$ となる