3Cmm26

正の数 t に対して, 関数 $f(x) = \dfrac{tx+1}{x^2+t^2}$ の最小値を $g(t)$ とする。

(1) $g(t)$ は t の減少関数になることを示せ。

(2) $g(t)$ の値がとる範囲を求めよ。

〔大阪市大〕

(1) $f(x) = y = \dfrac{tx+1}{x^2+t^2}$ として ~~変形すると~~

$y(x^2+t^2) = tx+1$

$yx^2 - tx + yt^2 - 1 = 0$ とするとき x は実数なので判別式 $D \geqq 0$

とすると

$t^2 - 4y(yt^2-1) \geqq 0$

$-4t^2y^2 + 4y + t^2 \geqq 0$

$4t^2y^2 - 4y - t^2 \leqq 0$

$y = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4t^4}}{4t^2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+t^4}}{2t^2}$ より

$\dfrac{1-\sqrt{1+t^4}}{2t^2} \leqq y \leqq \dfrac{1+\sqrt{1+t^4}}{2t^2}$ となるので

$f(x)$ の最小値 $g(t)$ は $g(t) = \dfrac{1-\sqrt{1+t^4}}{2t^2} = \dfrac{-t^2}{2(1+\sqrt{1+t^2})} < 0$

$\therefore$ $g(t) < 0$ であるから減少関数となる

(2)

$t > 0$ より

$g(0) = 0$ $\qquad \displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t^4}+1}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}$

以上より

$-\dfrac{1}{2} < g(t) < 0$