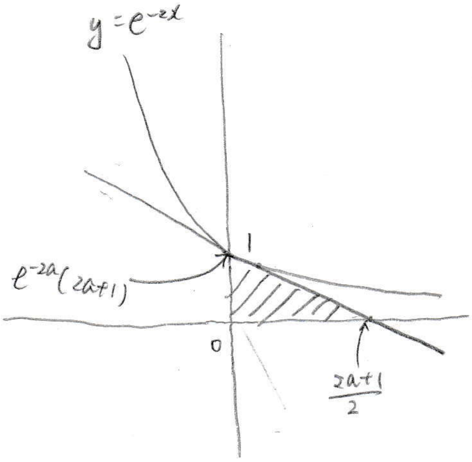
3Cmm27

aを正の数とするとき, 曲線$y=e^{-2x}$上の点(a, e^{-2a})における接線とx軸, y軸とで作られる三角形の面積を最大にするaの値と, そのときの面積を求めよ。　〔大阪電通大〕



$y'=-2e^{-2x}$より

点(a, e^{-2a})における接線は

$$y=-2e^{-2a}(x-a)+e^{-2a}$$

$$y=-2e^{-2a}x+2ae^{-2a}+e^{-2a}$$

y切片の座標は　$(0,\ e^{-2a}(2a+1))$

x切片の座標は　$\left(\frac{2a+1}{2},\ 0\right)$

求める三角形の面積は上図の斜線部であるからその面積を$S(a)$とすると

$S(a)=\dfrac{(2a+1)^2e^{-2a}}{4}$　となるが$S(a)$の最大値を調べるのは

$s(a)=(2a+1)^2e^{-2a}$の最大値を調べれば十分である

$\therefore s'(a)=4(2a+1)e^{-2a}-2(2a+1)^2e^{-2a}$

$\quad =2e^{-2a}(1-4a^2)$

$s'(a)=0$とすると　$e^{-2a}>0$より　$a=\pm\frac{1}{2}$

a	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$s'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$s(a)$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘
		極小		極大	

増減表をかくと左図のようになり、$a=\frac{1}{2}$のときに$s(a)$は極大かつ最大値をとりその値は$\frac{4}{e}$

$\therefore$ 求める面積$S(a)$の最大値は　$\dfrac{s(\frac{1}{2})}{4}=\dfrac{1}{e}$

$$\underline{\frac{1}{e}}$$