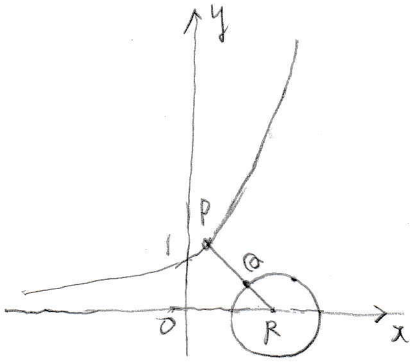
30mm28

曲線 $y=e^x$ 上の点 P と円 $(X-1)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 上の点 Q を結ぶ線分 PQ の長さの最小値を求めよ。　〔都立大〕



最小となるのは円の中心 R(1, 0) と P, Q が一直線上にならぶことから求める PQ の長さを次のように考える

$PQ = PR - QR$ (半径)

ここで $P(x, e^x)$ として PQ を x の関数として表すと

$$l(x) = \sqrt{(x-1)^2+(e^x)^2} - \frac{1}{2}$$

$= \sqrt{(x-1)^2+e^{2x}} - \frac{1}{2}$ となるが PQ が最小となるためには $\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}$ の根号内の $(x-1)^2+e^{2x}$ が最小になることを言えばよい ただし、その最小値は $\frac{1}{2}$ よりは大きいものとする

このとき $g(x) = (x-1)^2+e^{2x}$ とすると

$$g'(x) = 2(x-1) + 2e^{2x}$$

$$= 2(x-1+e^{2x})$$

このとき $g'(x)=0$ とすると $x=0$ のとき極値をとる

x	…	0	…
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	2	↗

増減表をかくと左のようになり
$x=0$ のとき極小かつ最小値 2 となる
このとき $\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}} = \sqrt{2} > \frac{1}{2}$ であるから

PQ の長さの最小値は $l(0) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

$\therefore\ PQ = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$