3cumam29

原点から曲線 $y=\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の各点における接線までの距離の最大値と最小値を求めよ。〔横浜市大〕

$f(x)=\cos x$ とおくとき この曲線上の点は $(t, \cos t)$ とおける。

$f'(x)=-\sin x$ より 曲線上における接線の式は

$$y=-\sin t(x-t)+\cos t$$

つまり

$$\sin t x+y-t\sin t-\cos t=0$$ となる。

原点からこの直線までの距離を d とすると

$$d=\frac{|t\sin t+\cos t|}{\sqrt{\sin^2 t+1}}$$

$$\therefore d^2=\frac{(t\sin t+\cos t)^2}{\sin^2 t+1}=f(t) \text{ とおくと}$$

$$f'(t)=\frac{2t\cos t(t\sin t+\cos t)(\sin^2 t+1)-2\sin t\cos t(t\sin t+\cos t)^2}{(\sin^2 t+1)^2}$$

$$=\frac{2\cos t(t\sin t+\cos t)\{t(\sin^2 t+1)-\sin t(t\sin t+\cos t)\}}{(\sin^2 t+1)^2}$$

$$=\frac{2\cos t(t\sin t+\cos t)(t-\sin t\cos t)}{(\sin^2 t+1)^2}$$

$f'(t)=0$ とおくと　$\cos t=0$ より $t=\frac{\pi}{2}$　$2t-2\sin t\cos t=2t-\sin 2t \geqq 0$ ($\because t=0$ で 0)

また $t\sin t+\cos t=g(t)$ とすると $g'(t)=\cancel{\sin t}+t\cos t-\cancel{\sin t}=t\cos t$ より

関数 $g(t)$ の増減を調べると以下のようになり $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ で $g(t)=0$ となる t の値が

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-\pi$
$g(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

存在する。この $g(t)=0$ となる値を $t=t_0$ とするとして

$f(t)$ の増減表をかくと以下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	t_0	$\cdots$	π
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

よって $f(t)$ は $t=\frac{\pi}{2}$ のとき 極大値かつ最大値 $\frac{\pi^2}{8}$ をとり

$t=t_0$ で 極小値かつ最小値 0 をとる