



点 $P(x, y)$ が座標平面上の原点を中心とする単位円周上を動くとき、 $z = x^3 + y^3$ の値が最大になる点をすべて求めよ。また、そのときの z の値を求めよ。 [早稲田大]

単位円

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ として } x = \cos \theta, y = \sin \theta \text{ とすると } (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$z = \cos^3 \theta + \sin^3 \theta$$

$$z' = \frac{dz}{d\theta} = -3\cos^2 \theta \sin \theta + 3\cos \theta \sin^2 \theta$$

$$= -3\sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$z' = 0 \text{ より } \theta = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
z'	0	-	0	+	0	-	0
z	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	1

上の増減表より $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 1 をとる。

このとき $x=1, y=0$ または $x=0, y=1$

よって P は $(1, 0)$ $(0, 1)$ として $z=1$

