30mm31

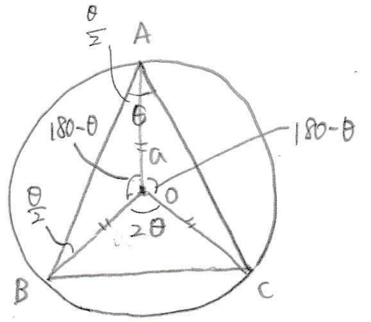
半径 a の円に内接する頂角 θ の 2 等辺三角形の面積を S とする。

(1) S を a, θ で表せ。

(2) S を最大にする θ の値を求めよ。

〔東海大〕

(1)



円に内接する二等辺三角形を

$\triangle ABC(AB=AC)$ として

頂角 θ とするとき面積 S は

$S=\frac{1}{2}a^2\sin(180-\theta)\times 2+\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta$

$=\frac{1}{2}a^2\sin 2\theta+a^2\sin\theta$

$\therefore S=\frac{1}{2}a^2(\sin 2\theta+2\sin\theta)\quad(\because 0<\theta<\pi)$

(2) $S'=\frac{1}{2}a^2(2\cos 2\theta+2\cos\theta)$

$=a^2(\cos 2\theta+\cos\theta)$

$\cos 2\theta+\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta-1+\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0\quad\because -1<\cos\theta<1$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき S は極値をとる. このとき $\theta=\frac{\pi}{3}$ であり

増減表をかくと以下のようになる

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π
S'	/	+	0	−	/
S	/	↗	極大	↘	/

$\theta=\frac{\pi}{3}$