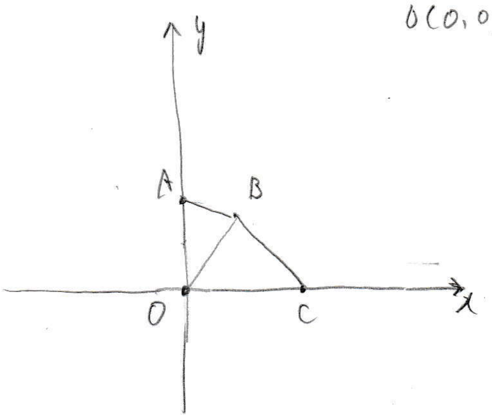
3Cm32

$0 < x < 1$ の範囲で, 4 点 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(x, \sqrt[3]{1-x^3})$, $(1, 0)$ を頂点とする四角形の面積を x で表し, その最大値を求めよ。 〔信州大〕



$O(0,0)$, $A(0,1)$ $B(x, \sqrt[3]{1-x^3})$, $C(1,0)$ とする

四角形 OABC

$= \triangle OAB + \triangle OBC$

$= 1 \times x \times \frac{1}{2} + 1 \times \sqrt[3]{1-x^3} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt[3]{1-x^3}$ となる. …①

四角形 OABC の面積を $S(x)$ とすると ①より

$S(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt[3]{1-x^3})$ $(\because 0 < x < 1)$ $\qquad \sqrt[3]{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{3}}$

$S'(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{3}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3x^2)\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\right\}$

$S'(x) = 0$ とおくと $\quad 1 - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = 0 \rightarrow \sqrt[3]{(1-x^3)^2} = x^2$

両辺 3 乗して

$(1-x^3)^2 = x^6$

$1 - 2x^3 + x^6 = x^6 \qquad 2x^3 = 1 \qquad x^3 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 極値をとる

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	…	1
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗	極大	↘	

このとき左図より

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 極大かつ

最大値となり

その値は $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$