3cmm 34

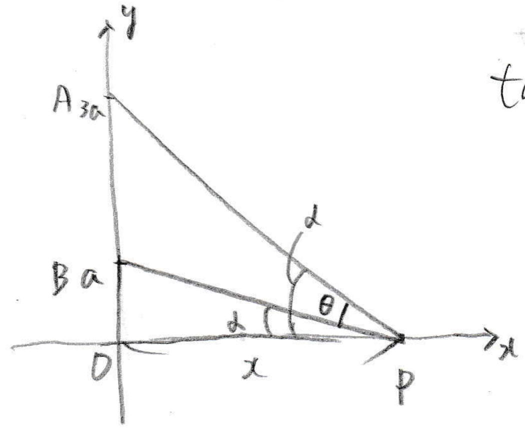
座標平面上に 3 点 A(0, $3a$), B(0, a), P(x, 0) をとり, $\angle \mathrm{APB} = \theta$ とおく。ただし, a は正の定数で, $x > 0$ とする。

(1) $\tan\theta$ を a, x で表せ。

(2) 点 P が x 軸上を動くとき, θ が最大となる点 P の座標, およびそのときの θ の値を求めよ。

〔富山医薬大〕

(1)



$\angle \mathrm{APO} = \alpha$　$\angle \mathrm{BPO} = \beta$ とおく

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3a}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{3a}{x}\cdot\frac{a}{x}} = \frac{2ax}{x^2 + 3a^2} \quad (x > 0)$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2ax}{x^2+3a^2} \quad (\because x>0)$$

(2)

$\tan\theta$ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で単調増加なので，$\tan\theta$ が極大なら θ も極大

ここで $f(x) = \dfrac{2ax}{x^2+3a^2}$ とおくと $f'(x) = \dfrac{2a(x^2+3a^2) - 2x\cdot 2ax}{(x^2+3a^2)^2}$

$\therefore f'(x) = \dfrac{2a(3a^2 - x^2)}{(x^2+3a^2)^2}$ $(\because x>0)$　これより $f(x)$ は $x = \sqrt{3}a$ で極値をとる

x	…	$\sqrt{3}a$	…
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	極大	↘

$f(x)$ は $x = \sqrt{3}a$ で極大かつ最大値をとる

$\mathrm{P}(\sqrt{3}a, 0)$

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}a^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

以上より，求める P の座標は $\mathrm{P}(\sqrt{3}a, 0)$

θ の値は $\frac{\pi}{6}$ となる