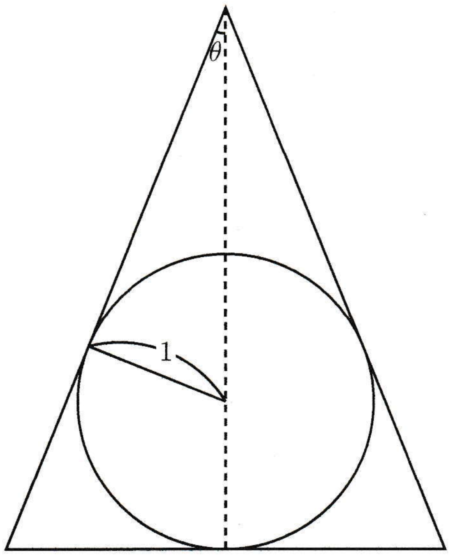
3Cmm35

半径1の球が右図 (球の中心を通る断面図) のように内接する直円すいの体積を V とするとき,

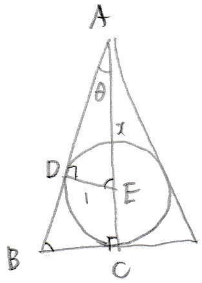
(1) 図に示す角 θ を使って V を表せ。

(2) $x=\sin\theta$ とおいて, V を x の関数とみなし, x のとりうる値の範囲で V の増減を調べて V の最小値を求めよ。



〔大阪工大〕

(1)



$\sin\theta=\frac{1}{x}$ $x=\frac{1}{\sin\theta}$

また左図において

$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$ である

$\cos\theta=\frac{AD}{x}=AD\sin\theta$

より $AD=\frac{1}{\tan\theta}$ $AC=\frac{1}{\sin\theta}+1$ より $\triangle ADE$ と $\triangle ACB$ の相似比は

$AD:AC=\frac{1}{\tan\theta}:\frac{1}{\sin\theta}+1=\cos\theta:1+\sin\theta$

$1:BC=\cos\theta:1+\sin\theta$

$BC\cos\theta=1+\sin\theta$ $\therefore BC=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$V=\frac{1}{3}\pi BC^2 AC$ より $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2\left(\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\right)$ $V=\frac{1}{3}\pi\frac{(1+\sin\theta)^3}{\sin\theta\cos^2\theta}$

となり $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$ より

$V=\frac{1}{3}\pi\frac{(1+\sin\theta)^2}{\sin\theta(1-\sin\theta)}$

(2)

$\sin\theta=x$ とおくと $V=\frac{1}{3}\pi\frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$ $(\because 0<x<1)$

$V'=\frac{1}{3}\pi\frac{2x(1+x)(1-x)-(1-2x)(1+x)^2}{x^2(1-x)^2}=\frac{1}{3}\pi\frac{3x^2+2x-1}{x^2(1-x)^2}=\frac{1}{3}\pi\frac{(x+1)(3x-1)}{x^2(1-x)^2}$ $(\because 0<x<1)$

$\therefore V'$ は $x=\frac{1}{3}$ のとき極値をとる 増減表を調べると左下のようになり

$x=\frac{1}{3}$ のとき極小かつ最小値 $\frac{8}{3}\pi$ をとる

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1
V'	/	$-$	0	$+$	/
V	/	↘	$\frac{8}{3}\pi$	↗	/