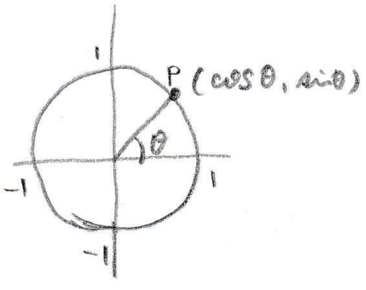
3C maxmin36

点 $\mathrm{P}(x, y)$ が座標平面上の原点を中心とする単位円周上を動くとき, $z = x^3 + y^3$ の値が最大になる点をすべて求めよ。また, そのときの z の値を求めよ。　〔早稲田大〕



点 P(x, y) を左図のように、

$P(\cos\theta, \sin\theta)$ とする. $(\because\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

このとき

$z = \cos^3\theta + \sin^3\theta$

$= (\cos\theta + \sin\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= (\cos\theta + \sin\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

ここで $t = \sin\theta + \cos\theta$ とかけば …①

$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $(\because -\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

①の両辺を2乗すると

$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ となり $\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}$ となる …②

①,②より

$z = t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = \frac{3t - t^3}{2}$

$\frac{dz}{dt} = \frac{3 - 3t^2}{2} = \frac{3}{2}(1+t)(1-t)$

よって $t = -1, 1$ で極値をとる $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ で増減表をかくと

t	$-\sqrt{2}$	…	-1	…	1	…	$\sqrt{2}$
z'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
z	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって $t = 1$ のとき z は最大値で 1 をとる.

このとき

$\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\sin\theta\cos\theta = 0$ より $\cos\theta = 1$ かつ $\sin\theta = 0$

または

$\cos\theta = 0$ かつ $\sin\theta = 1$ となるので

$(x, y) = (1, 0)$ または $(0, 1)$ のとき最大値1になる