3C max min 39

eを自然対数の底とし，$\dfrac{1}{e}<t<1$とし$S(t)=\displaystyle\int_0^1 |xe^{-x}-tx|\,dx$とおく。$S(t)$は$t=A$のとき最小値$M$をとるとする。

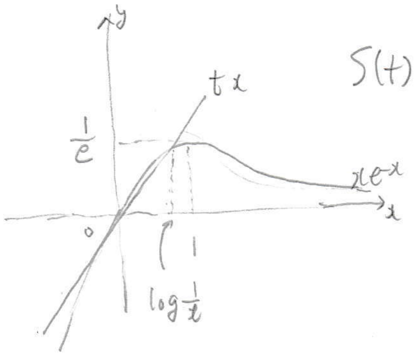
$$\log A=-\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$$

$$M=-A\left(\boxed{}+\sqrt{\boxed{}}\right)+\boxed{}+\frac{\boxed{}}{e}$$

である。 〔上智大〕

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx+C$$
$$=-(1+x)e^{-x}+C$$

$xe^{-x}-tx=x(e^{-x}-t)$　　$e^{-x}=t$とおくと $-x=\log t$ より $x=-\log t$



$$S(t)\int_0^{-\log t}(xe^{-x}-tx)dx+\int_{-\log t}^{1}(tx-xe^{-x})dx$$
$$=\left[-(1+x)e^{-x}-\frac{1}{2}tx^2\right]_0^{-\log t}+\left[\frac{1}{2}tx^2+(1+x)e^{-x}\right]_{-\log t}^{1}$$
$$=\left\{(\log t-1)t-\frac{1}{2}t(\log t)^2+1\right\}+\left\{\frac{1}{2}t+\frac{2}{e}-\frac{1}{2}t(\log t)^2-(1-\log t)t\right\}$$ より

$$S(t)=-t(\log t)^2+2t\log t-\frac{3}{2}t+\frac{2}{e}+1$$

$$S'(t)=-(\log t)^2-t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}+2\log t+2t\cdot\frac{1}{t}-\frac{3}{2}$$
$$=-(\log t)^2\cancel{-2\log t}\cancel{+2\log t}+2-\frac{3}{2}$$ より

$S'(t)=-(\log t)^2+\dfrac{1}{2}$　　よって $\log t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ （$\because \log t>0$）のとき最小 (答)

$$M=-A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cancel{2}A\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}-\frac{3}{2}A+\frac{2}{e}+1$$
$$=-\frac{1}{2}A+\sqrt{2}A-\frac{3}{2}A+\frac{2}{e}+1$$
$$=-2A+\sqrt{2}A+\frac{2}{e}+1$$
$$=-A(2+\sqrt{2})+1+\frac{2}{e}$$
(答)