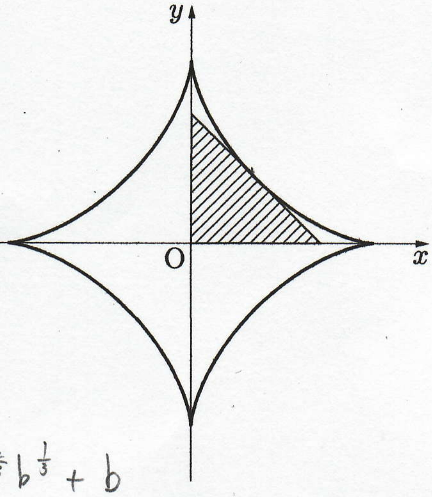
3C max mi 4

曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の接線と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積の最大値を求めよ。



〔学習院大〕

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0 \to \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ となり

曲線上の点 $P(a,b)$ における接線は

$y=-\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}(x-a)+b \to y=-\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}x+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b$

$y=-\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}x+b^{\frac{1}{3}}\underbrace{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}_{1}$ これを整理して

$b^{\frac{1}{3}}x+a^{\frac{1}{3}}y=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ となりこれより

x 軸との交点は $(a^{\frac{1}{3}},0)$, y 軸との交点は $(0,b^{\frac{1}{3}})$ となる ……①

ここで $a=\cos^3\theta$, $b=\sin^3\theta$ とおけるので ∵ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ $\to (\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}}+(\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}=1$ より

①は x 軸との交点 $(\cos\theta,0)$ y 軸との交点 $(\sin\theta,0)$ である

このことより 三角形の面積 S は

$S=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$ であり 変形すると

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin 2\theta$

$0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ で $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値 1 となる

従って $S=\frac{1}{4}\sin 2\theta$ の最大値は $\frac{1}{4}$ である

$\frac{1}{4}$