3Cmax min 5

n を正の整数とするとき, 関数

$$f(x) = nx(1-x)^n \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値 $M(n)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \to \infty} M(n)$ を求めよ。

〔北見工大〕

(1)

$$f'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1}$$

$$= n(1-x)^{n-1}\{(1-x) - nx\} = n(1-x)^{n-1}\{1-(1+n)x\}$$

$f'(x)=0$ とすると $x = 1, \frac{1}{n+1}$ $\quad 0 < \frac{1}{n+1} < 1$

x	0		$\frac{1}{n+1}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$M(n)$	↘	

$$\therefore M(n) = n \cdot \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$M(n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{e \cdot 1}$$

$$\therefore \frac{1}{e}$$