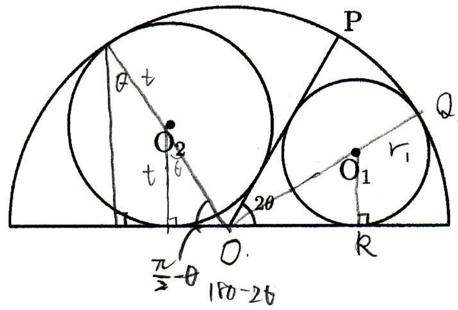
3C maxmi 6.

図のように, 半径1の半円O内に, 直径と角 2θ をなす線分OPをとる。OPにより分けられた2つの扇形内に, それぞれ内接する円 O_1, O_2 をかくとき,

(1) 円 O_1 の半径 r_1 は, $r_1 = \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$ で表されることを示せ。

(2) 円 O_1, O_2 の面積をそれぞれ S_1, S_2 とするとき, S_1, S_2 を求めよ。

(3) 和 $S_1 + S_2$ の最大値と, そのときの θ の値を求めよ。



〔山形大〕

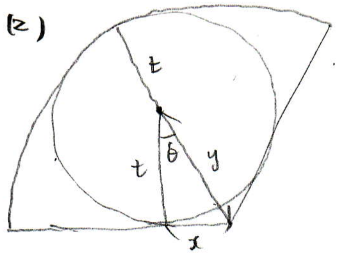
(1) 右図のように中心Oと O_1 を結んだ直線と円周上との交点をQとし、O_1 から直径におろした垂線の足をRとすると

$O_1Q = O_1R = r$ $\quad \angle QOR = \theta$

$\sin\theta = \dfrac{r_1}{OO_1}$ これより $OO_1 = \dfrac{r_1}{\sin\theta}$

$OO_1 + O_1Q = 1$ より $\dfrac{r_1}{\sin\theta} + r_1 = 1$ $\quad \dfrac{r_1(1+\sin\theta)}{\sin\theta} = 1$ $\quad \therefore r_1 = \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

(2)



大きい円の半径をtとすると

$\tan\theta = \dfrac{x}{t}$

$x = t\tan\theta$

$\sin\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{t\tan\theta}{y}$

$y = \dfrac{t\tan\theta}{\sin\theta} = \dfrac{t}{\cos\theta}$ …①

①より

$t + y = t + \dfrac{t}{\cos\theta} = 1$

$\dfrac{t(\cos\theta+1)}{\cos\theta} = 1$ $\quad \therefore$ 大きい円の半径は $t = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$S_1 = \left(\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\pi$ $\quad S_2 = \left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\pi$

注 (1)で θ を $\frac{\pi}{2}-\theta$ とすれば $t = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ は得られる

(3) $f(\theta) = S_1 + S_2 = \left\{\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\right\}\pi$

$= \left\{\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3} - \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}\right\}\pi = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta\{(1+\cos\theta)^3-(1-\sin\theta)^3\}}{(1+\sin\theta)^3(1+\cos\theta)^3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから $\cos\theta>0$ $\sin\theta>0$ より $(1+\cos\theta)^3 = (1+\sin\theta)^3$ つまり $\sin\theta = \cos\theta$ となるとき極値をとる. このとき $\theta = \frac{\pi}{4}$

このとき $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\pi = 2\pi(3-2\sqrt{2})$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

$\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $2\pi(3-2\sqrt{2})$

数樂 http://www.mathtext.info/