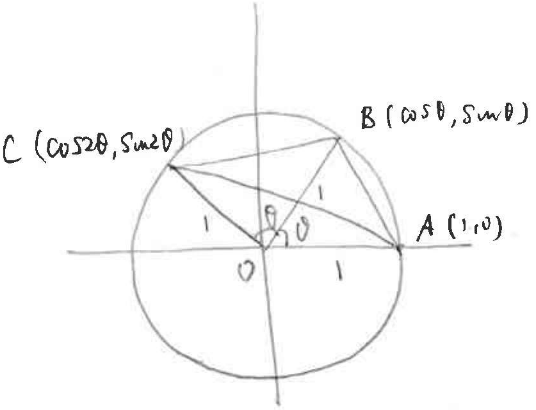
群馬大



△ABC = △OAB + △OBC − △OAC　△ABCの面積をSとすると

$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 2\theta$

$= \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$= \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$

$= \sin\theta(1-\cos\theta)$

よって

$S = \sin\theta(1-\cos\theta)$ …(答)

Sをθで微分すると

$S' = \cos\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta\cdot\sin\theta$

$= \cos\theta - \cos^2\theta + (1-\cos^2\theta)$

$= -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1$

$= -(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1)$

$0 < \theta < \pi$ なので $S' = 0$ となるθは $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ となるときで

$\theta = \frac{2}{3}\pi$　関数Sの増減表をかくと

θ	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

$S = \sin\frac{2}{3}\pi\left(1 - \cos\frac{2}{3}\pi\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

よって△ABCの面積は $\theta = \frac{2}{3}\pi$ で最大値をとり

その値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ である …(答)