

関数 $A(x), B(x)$ を次のように定義するとき, 次の問いに答えよ。

$$A(x) = \int_0^x e^{-at} \sin(bt) dt, \quad B(x) = \int_0^x e^{-at} \cos(bt) dt$$

ただし, a, b は 0 でないとする。

- (1) 部分積分を使って, $A(x)$ を $B(x)$ を用いて表しなさい。また $B(x)$ を $A(x)$ を用いて表しなさい。
- (2) $A(x), B(x)$ をそれぞれ求めなさい。
- (3) (2) の $A(x)$ で, $a = 1, b = 2$ とする。

$$S_n = A(n\pi) - A((n-1)\pi) \quad (n : \text{自然数})$$

とすると, 数列 $\{S_n\}$ について, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ の値を求めなさい。

〔福島大〕