3C積分100

関数 $f(x)=(1+x)\sin x+(1-x)\cos x$ が $x>0$ で極値をとる最小の x の値を a とするとき

(1) a の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ を求めよ。

〔群馬大〕

$f'(x)=\sin x+(1+x)\cos x-\cos x-(1-x)\sin x$

$\quad = x(\sin x+\cos x)$

$x>0$ より $f'(x)=0$ となるのは $\sin x+\cos x=0$ のとき.

このとき $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ となり $x+\frac{\pi}{4}=0$ とすると

$x>0$ かつ最小であることから $x=\frac{3}{4}\pi$ $\quad\therefore\ a=\frac{3}{4}\pi$

$\displaystyle\int(1+x)\sin x\,dx=\int(1+x)(-\cos x)'\,dx$

$\displaystyle\quad=-(1+x)\cos x-\int(-\cos x)\,dx$

$\quad=-\cos x-x\cos x+\sin x+C$ （$\because C$ は積分定数）

$\displaystyle\int(1-x)\cos x\,dx=\int(1-x)(\sin x)'\,dx$

$\displaystyle\quad=(1-x)\sin x-\int -1\cdot\sin x\,dx$

$\quad=\sin x-x\sin x-\cos x+C$ （$\because C$ は積分定数）

$\displaystyle\therefore\int_0^{\frac{3}{4}\pi}f(x)\,dx=\Big[-\cos x-x\cos x+\sin x+\sin x-x\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{3}{4}\pi}$

$\quad=\Big[-2\cos x+2\sin x-x\cos x-x\sin x\Big]_0^{\frac{3}{4}\pi}$

$\quad=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right)-(-2)$

$\quad=\frac{4}{\sqrt{2}}+2=2+2\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ 2+2\sqrt{2}$