ⅢC
積分 (10)

$x>0$ において定義された関数 $y=f(x)=x(1+\log x)$ のグラフを C とする。また, 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線 l の方程式を $y=g(x)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $g(x)$ を求めよ。

(2) $x>0$ において, $f(x) \geqq g(x)$ であることを示せ。

(3) 2 直線 $x=1$, $x=2$ と曲線 C および接線 l で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) t が $t>0$ の範囲を動くとき, 面積 $S(t)$ が最小となる t を求めよ。

〔新潟大〕

(1) $f'(x) = 1+\log x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= 2+\log x$ $\quad f'(x)>0 \ (\because x>0)$

点 $(t, f(t))$ における接線 l は

$g(x) = (2+\log t)(x-t) + t(1+\log t)$

$= (2+\log t)x - t$ $\quad$ $\underline{g(x) = (2+\log t)x - t}$ $(\because t>0)$

(2) $f(x)-g(x)=h(x)$ とおく

$h(x) = x(1+\log x) - (2+\log t)x + t$

$= x(\log x - 1 - \log t) + t$

$h'(x) = (\log x - 1 - \log t) + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \log x - \log t$ $\quad h'(x)=0$ とすると

$x=t$ よって $h(x)$ の最小値は

$f(t) = t(\cancel{\log t} - 1 - \cancel{\log t}) + t$

$= 0$

以上より $h(x)$ は $x>0$ のとき $h(x) \geqq 0$ となるから $f(x) \geqq g(x)$ となる.

x	0	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$+$
$h(x)$		↘		↗

(3) (2)より

$S(t) = \int_1^2 \{x(1+\log x) - (\log t + 2)x + t\} dx$

$= \int_1^2 \{x\log x - (\log t + 1)x + t\} dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}(\log t + 1)x^2 + tx\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$

$= 2\log 2 - 2(\log t + 1) + 2t + \frac{1}{2}(\log t + 1) - t - \frac{3}{4}$

$= -\frac{3}{2}\log t + t + 2\log 2 - \frac{9}{4}$

$\underline{S(t) = -\frac{3}{2}\log t + t + 2\log 2 - \frac{9}{4}}$ $(\because t>0)$

(4) $S'(t) = -\frac{3}{2t} + 1 = \frac{-3+2t}{2t}$ $\quad t>0$ より $t=\frac{3}{2}$ のとき $S(t)$ が最小となる

よって $S(t)$ を最小にする t の値は $t=\frac{3}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$-$	0	$+$
$S(t)$		↘		↗