

30 秒 分 02

関数 $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 3}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を、 x 軸との交点、 $f(x)$ の極値、漸近線を明示してかけ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 直線 $y = a(x+1) - 1$ と $y = f(x)$ のグラフの共有点の個数を a の値によって分類せよ。

(1)

$$\begin{array}{r} x \\ x^2+3 \overline{) x^3-5x} \\ \underline{-x^3+3x} \\ -8x \end{array}$$

$$f(x) = x - \frac{8x}{x^2+3}$$

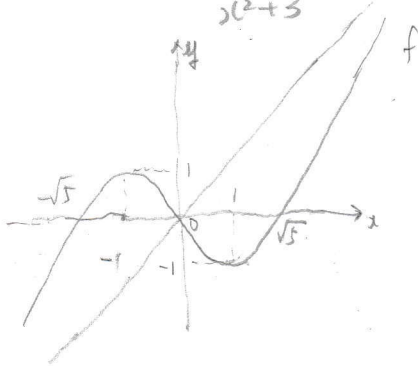
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2+3} = 0$$

[静岡大]
漸近線 $y = x$

$$f'(x) = 1 - \frac{8(x^2+3) - 16x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 9 + 8x^2 - 24}{(x^2+3)^2}$$

$$f(x) = \frac{x(x^2-5)}{x^2+3} = \frac{x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{x^2+3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

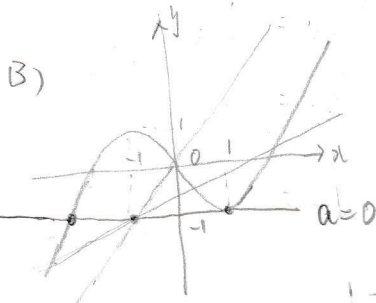


x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	↑	↘	↓	↗

(2) $2 \int_0^1 f(x) dx = -2 \int_0^{\sqrt{5}} \left(x - \frac{8x}{x^2+3} \right) dx = -2 \int_0^{\sqrt{5}} \left(x - \frac{4(x^2+3)'}{x^2+3} \right) dx$

$$= -2 \left[\frac{1}{2} x^2 - 4 \log(x^2+3) \right]_0^{\sqrt{5}} = \left[-x^2 + 8 \log(x^2+3) \right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= (-5 + 24 \log 2) - (0 + 8 \log 3) = 24 \log 2 - 8 \log 3 - 5$$



- $a < 0$ のとき 1 個
 - $a = 0$ のとき 2 個
 - $0 < a < 1$ のとき 3 個
 - $a \geq 1$ のとき 1 個
- $y = a(x+1) - 1$ は漸近線 $y = x$ 上の点 $(-1, -1)$ を通る