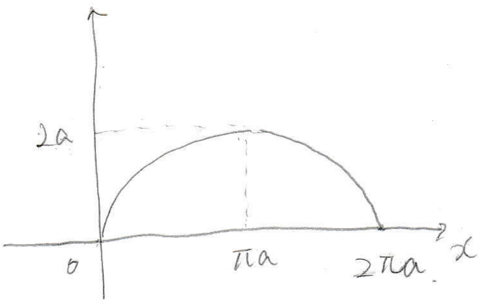
サイクロイド $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ (a は正の定数) の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　〔有名問題〕



$y=0$ とすると $\theta = 0,\ 2\pi$

このとき $x = 0,\ 2\pi a$

$\theta = \pi$ のとき $y = 2a,\ x = \pi a$

求める面積 S は

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx \cdots ①$$

$x: 0 \longrightarrow 2\pi a$

$\theta: 0 \longrightarrow 2\pi$ となり

$x = a(\theta - \sin\theta)$ より

$dx = a(1-\cos\theta)$　　$y = a(1-\cos\theta)$ より ①は

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\left\{[\theta]_0^{2\pi} - 2[\sin\theta]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\,d\theta\right\}$$

$$= a^2\left\{2\pi - 0 + \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi}\right\}$$

$$= a^2(2\pi - 0 + 0 + \pi)$$

$$= 3\pi a^2$$

$3\pi a^2$ //