3C 積分14

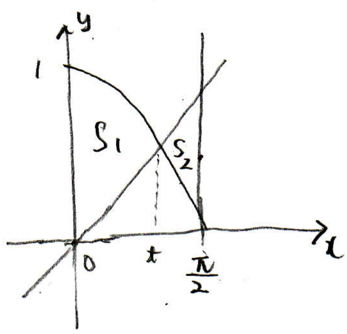
曲線 $C : y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $l_1 : y = ax (a > 0)$ および y 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とする。また, C と l_1 および直線 $l_2 : x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とし, S_1 と S_2 の和を S とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) C と l_1 の交点の x 座標を t とするとき, a と S を t を用いた式で表せ。

(2) S が最小となる t の値を求めよ。

〔福岡大〕

(1)



$\cos t = at$

$a = \dfrac{\cos t}{t}$

$S_1 = \displaystyle\int_0^t (\cos x - ax)\,dx = \left[\sin x - \frac{1}{2}ax^2\right]_0^t$

$= \sin t - \dfrac{1}{2}at^2 \cdots ①$

$S_2 = \displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}} (ax - \cos x)\,dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 - \sin x\right]_t^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1}{8}\pi^2 a - 1 - \dfrac{1}{2}at^2 + \sin t \cdots ②$

$S = ① + ②$ より $S = -at^2 + 2\sin t + \dfrac{\pi^2}{8}a - 1$ また $a = \dfrac{\cos t}{t}$ より

$S = \dfrac{\pi^2 \cos t}{8t} - t\cos t + 2\sin t - 1 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$

(2)

$S' = \dfrac{-8t\pi^2 \sin t - 8\pi^2 \cos t}{64t^2} - \cos t + t\sin t + 2\cos t$

$= \dfrac{\pi^2}{8}\left(\dfrac{-t\sin t - \cos t}{t^2}\right) + \cos t + t\sin t = \dfrac{\pi^2}{8}(t\sin t + \cos t)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) + (\cos t + t\sin t)$

$= \dfrac{\pi^2}{8}(t\sin t + \cos t)\left(-\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{8}{\pi^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{8}(t\sin t + \cos t)\left(\dfrac{8t^2 - \pi^2}{t^2\pi^2}\right)$

$= \underbrace{\dfrac{1}{8t^2}(t\sin t + \cos t)}_{正}(8t^2 - \pi^2)$ $S' = 0$ より $8t^2 - \pi = 0$ とし

$t^2 = \dfrac{\pi}{8}$ $t = \pm\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ より $t = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ このとき最小になる

$t = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$