3C 積分 15

曲線 C が, θ を媒介変数として $x = \sin\theta,\ y = \dfrac{1}{\cos\theta}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と表されているとする。曲線 C 上で, x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点をPとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点Pにおける曲線 C の接線の方程式を求めよ。

(2) 点Pを通り, x 軸に垂直な直線を l とする。曲線 C, x 軸, y 軸および直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ。

〔小樽商科大〕

(1)

$x^2 = \sin^2\theta \qquad \cos^2\theta = \dfrac{1}{y^2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\quad x^2 + \dfrac{1}{y^2} = 1$ である. Pの x 座標が ≪ こんなことしなくても $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ が出る!!

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\quad \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{y^2} = 1 \quad \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4} \quad y^2 = 4 \quad y = \pm 2$

$0 < \cos\theta < 1$ であるから $y > 0$ $\therefore y = 2$ 従って $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ となる

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta \quad \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta} \Big/ \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta} = \dfrac{x}{\frac{1}{y^3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{8}} = 4\sqrt{3}$

となるので求める接線の式は

$y = 4\sqrt{3}\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \qquad \underline{y = 4\sqrt{3}x - 4}$ //

(2) 交点の x 座標が $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ であるから $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ において

$\dfrac{dx}{d\theta} > 0$ となるので $y > 0$ $\therefore$ 求める面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より

$dx = \cos\theta\,d\theta$

$\therefore \underline{\dfrac{\pi}{3}}$ //