3C 積分16

2つの曲線 $C_1: y=\sqrt{3}\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, $C_2: \sqrt{2}\sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ における2つの曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とするとき，$\sin\alpha, \cos\alpha$ の値を求めよ。

(2) 2つの曲線 C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ。

〔岩手大〕

(1) $\sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}\sin 2x$ 倍角の公式より

$\sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x$ $\cos x(2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ または $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

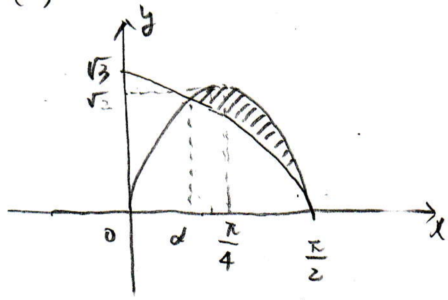
i) $\cos x = 0$ のとき $\alpha = \frac{\pi}{2}$ これは $0<x<\frac{\pi}{2}$ に適さない

ii) $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $0<\sin x<1$ であるから $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ となり このとき

$\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1-\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ $\therefore \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ $\because \cos\alpha > 0$ より

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ $\therefore \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$

(2)



$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{3}\cos x)\,dx$

$= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \sqrt{3}\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sqrt{3}\sin\alpha$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\right) + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$3\sqrt{2}$

$= \frac{11\sqrt{2}}{8} - \sqrt{3}$

$\frac{11\sqrt{2}}{8} - \sqrt{3}$