数C 積分17

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin 3x\,dx$ を求めよ。

(2) $a$ は実数全体を動くとする。$\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi - x - a\sin 3x)^2\,dx$ の最小値を求め，そのときの $a$ の値も求めよ。

〔群馬大〕

(1) $\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

$\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin 3x\,dx = \left[(\pi - x)\cdot -\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi} + \int \frac{1}{3}\cos 3x\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}(\pi - x)\cos 3x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\pi}$

$= 0 + \frac{1}{3}\pi + 0$

$\therefore \frac{1}{3}\pi$

(2)
与式 $= \int_0^{\pi}(\pi - x)^2dx - \int_0^{\pi}2(\pi - x)a\sin 3x\,dx + \int_0^{\pi}a^2\sin^2 3x\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^{\pi} - 2a\cdot\frac{1}{3}\pi + a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 6x}{2}dx$

$= \frac{1}{3}\pi^3 - \frac{2}{3}a\pi + a^2\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 6x}{12}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{3}\pi^3 - \frac{2}{3}a\pi + \frac{a^2}{2}\pi$

$= \frac{\pi}{2}\left(a^2 - \frac{4}{3}a\right) + \frac{1}{3}\pi^3$

$= \frac{\pi}{2}\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3}\pi^3$

$\therefore a = \frac{2}{3}$ のとき 最小値 $-\frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3}\pi^3$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$=$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$=$

$\begin{cases} \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \quad = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta \\ 2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta \\ \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \text{ より} \end{cases}$