3c積分18

2つの曲線 $y=\log x \cdots$①, $y=\log x^2 \cdots$② を考える。ただし, $x>0$ とする。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 点 $(a, \log a)$ における①の接線 l_1 の方程式と, 点 $(b, \log b^2)$ における②の接線 l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) l_1 と l_2 が一致するとき, a, b の値と l_1 の方程式を求めよ。

(3) 部分積分法を用いて, 不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ。

(4) l_1 と l_2 が一致しているとき, l_1 と2つの曲線①, ②によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

〔山形大〕

(1) ① $y'=\frac{1}{x}$, ② $y'=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x}$ から

$l_1: y=\frac{1}{a}(x-a)+\log a \rightarrow y=\frac{1}{a}x+\log a-1$

$l_2: y=\frac{2}{b}(x-b)+\log b^2 \rightarrow y=\frac{2}{b}x+2\log b-2$ (答)

(2) (1)より $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$, $\log a-1=2\log b-2$ より

$b=2a \cdots$ i) $\log\frac{a}{b^2}=-1$ $\frac{a}{b^2}=e^{-1}\cdots$ ii) i)ii)より $\frac{a}{4a^2}=e^{-1}$ $a\neq 0$ より

$\frac{1}{4a}=e^{-1}$ $4a=e$ $a=\frac{e}{4}$ これより $b=\frac{e}{2}$ $a=\frac{e}{4}, b=\frac{e}{2}$

(3) $\displaystyle\int \log x\,dx=\int \overset{f'(x)}{1}\cdot\overset{g(x)}{\log x}\,dx = x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=x\log x-\displaystyle\int dx$ ∴ $x\log x-x+C$ (∵Cは積分定数)

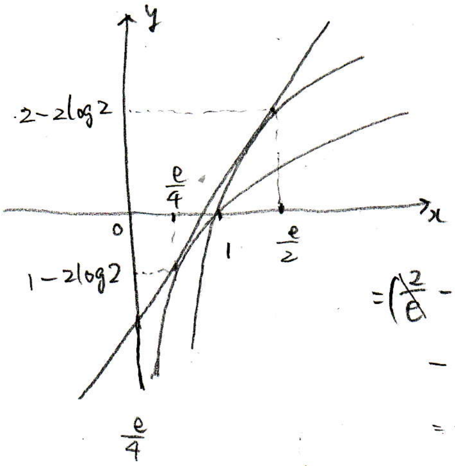
ちなみに

$\displaystyle\int \log x^2 dx = x\log x^2-\int x\cdot\frac{2}{x}dx$

$=x\log x^2-2x+C$ (∵Cは積分定数)

(4) 接線は $y=\frac{4}{e}x-2\log 2$ 接点は $\left(\frac{e}{4}, 1-2\log 2\right), \left(\frac{e}{2}, 2-2\log 2\right)$

$\log x=\log x^2$ より $\log x^2-\log x=0$ $\log x=0$ $x=1$ ∴ $(1, 0)$で交わる



求める面積は

$\displaystyle\int_{\frac{e}{4}}^{1}\left(\frac{4}{e}x-2\log 2-\log x\right)dx+\int_{1}^{\frac{e}{2}}\left(\frac{4}{e}x-2\log 2-\log x^2\right)dx$

$=\left[\frac{2}{e}x^2-2x\log 2-x\log x+x\right]_{\frac{e}{4}}^{1}+\left[\frac{2}{e}x^2-2x\log 2-x\log x^2+2x\right]_{1}^{\frac{e}{2}}$

$=\left(\cancel{\frac{2}{e}}-\cancel{2\log 2}+1\right)-\left(\frac{e}{8}-\frac{e}{2}\log 2-\frac{e}{4}\log\frac{e}{4}+\frac{e}{4}\right)+\left(\frac{e}{2}-e\log 2-\frac{e}{2}\log\frac{e}{4}+e\right)$

$-\left(\cancel{\frac{2}{e}}-\cancel{2\log 2}+2\right)=\frac{5}{8}e-\frac{e}{2}\log 2-\frac{e}{4}\log\frac{e}{4}-1$ [illegible] $\frac{e}{4}\log\frac{e}{4}$

$=\frac{5}{8}e-\frac{e}{2}\log 2-\frac{e}{4}(1-2\log 2)-1$ $=\frac{e}{4}(1-2\log 2)$ であるから

$=\frac{3}{8}e-1$

$\frac{3}{8}e-1$