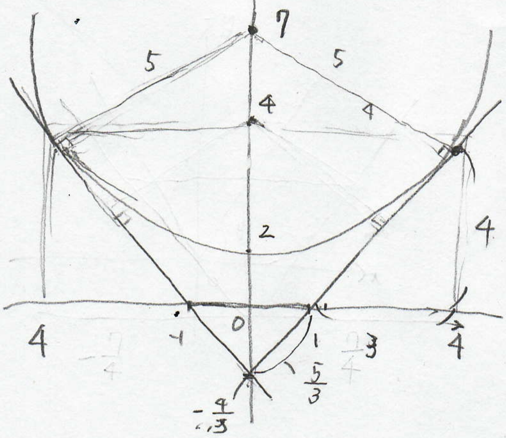
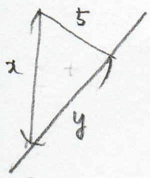
3C 積分 14

水を満たした容器がある。この容器の側面は線分 $y=\frac{4}{3}(x-1)$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ を y 軸の周りに1回転したものであり，底面は半径1の円である。半径5の鉄球をこの容器の中に静かに沈めるとき，あふれる水の体積の最大値を求めよ。ただし，容器の厚さは考えないものとする。

〔群馬大〕





3:4:5の相似の利用

$5:x=3:5$

$3x=25$ $\quad x=\frac{25}{3}$

$5:y=3:4$

$3y=20$ $\quad y=\frac{20}{3}$

$x=\frac{25}{3}$ より 鉄球の中心は $\frac{25}{3}-\frac{4}{3}=7$ $\quad (0,7)$ …①

このとき 鉄球の接点は xy平面でみると $(-4,4)$, $(4,4)$ である.

①より 鉄球をxy平面でみたとき その円の方程式は $x^2+(y-7)^2=25$

で y軸との交点でy座標が小さいほうは $(0,2)$ よって求める最大値は

$$\int_{-4}^{4}\pi x^2\,dy=\int_{2}^{4}\pi\{25-(y-7)^2\}dy$$

$$=\pi\left[25y-\frac{1}{3}(y-7)^3\right]_2^4$$

$$=\pi\left\{(100+9)-\left(50+\frac{125}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{52}{3}\pi$$

$\frac{52}{3}\pi$ //