3C 積分20

ぬけてる

関数 $A(x), B(x)$ を次のように定義するとき, 次の問いに答えよ。

$$A(x)=\int_0^x \overbrace{e^{-at}}^{f'(x)}\overbrace{\sin(bt)}^{g(x)}\,dt,\quad B(x)=\int_0^x \overbrace{e^{-at}}^{f(x)}\overbrace{\cos(bt)}^{g(x)}\,dt$$

ただし, a, b は 0 でないとする。

(1) 部分積分を使って, $A(x)$ を $B(x)$ を用いて表しなさい。また $B(x)$ を $A(x)$ を用いて表しなさい。

(2) $A(x), B(x)$ をそれぞれ求めなさい。

(3) (2) の $A(x)$ で, $a=1, b=2$ とする。

$$S_n = A(n\pi) - A((n-1)\pi) \quad (n:\text{自然数})$$

とするとき, 数列 $\{S_n\}$ について, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$ の値を求めなさい。

〔福島大〕

(1) $A(x)=\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\sin(bt)\right]_0^x+\int_0^x\left(-\frac{b}{a}\right)e^{-at}\cos(bt)\,dt$

$\therefore\ \underline{A(x)=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin(bx)+\frac{b}{a}B(x)}$ //

$B(x)=\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\cos(bt)\right]_0^x+\int_0^x\left(-\frac{b}{a}\right)\sin(bt)\,dt$

$\therefore\ \underline{B(x)=-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos(bx)+\frac{1}{a}-\frac{b}{a}A(x)}$ //

(2) $aA(x)-bB(x)=-e^{-ax}\sin(bx)$

$bA(x)+aB(x)=-e^{ax}\cos(bx)$

$ab\,A(x)-b^2B(x)=-be^{-ax}\sin(bx)$

$-\underline{)\ ab\,A(x)+a^2B(x)=-ae^{-ax}\cos(bx)+a}$

$-(a^2+b^2)B(x)=-be^{-ax}\sin(bx)+ae^{-ax}\cos(bx)-a$

$\underline{B(x)=\dfrac{e^{ax}(b\sin(bx)-a\cos(bx))+a}{a^2+b^2}}$ //

同様に $\underline{A(x)=\dfrac{-e^{-ax}(a\sin(bx)+b\cos(bx))+b}{a^2+b^2}}$ //

(3) $A(x)=\dfrac{-e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+2}{5}$ となる

$A(n\pi)=\dfrac{-2e^{-n\pi}+2}{5}$　　$A((n-1)\pi)=\dfrac{-2^{-(n-1)\pi}+2}{5}$

$S_n=\dfrac{-2e^{-n\pi}+2\ \ +2^{-(n-1)\pi}-2}{5}=\dfrac{2}{5}\left\{-e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right\}$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{\frac{2}{5}\left\{-e^{-(n+1)\pi}+e^{-n\pi}\right\}}{\frac{2}{5}\left\{-e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right\}}=\dfrac{e^{-(n+1)\pi}(-1+e^{\pi})}{e^{-n\pi}(-1+e^{\pi})}=e^{-\pi}$

$\therefore\ \underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=e^{-\pi}}$ //