3C 積分22

nを自然数とする。曲線 $y=2+\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\left(n+\dfrac{1}{3}\right)\pi\right)$, 直線 $x=\left(n+\dfrac{1}{3}\right)\pi$, x 軸および y 軸で囲まれる部分を D_n とおくとき, 次の各問いに答えよ。

(1) D_n の面積 S_n を求めよ。

(2) D_n を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}$ を求めよ。

〔宮崎大〕

(1) $\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi=\alpha$ とすると

$$S_n=\int_0^{\alpha}(2+\sin x)\,dx=\Big[2x-\cos x\Big]_0^{\alpha}=(2\alpha-\cos\alpha)-(0-1)$$

$$=2\alpha-\cos\alpha+1=2\alpha+1-\cos\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\pi$$

$\cos\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi=-\cos\frac{1}{3}\pi,\ \cos\frac{1}{3}\pi,\ -\cos\frac{1}{3}\pi\cdots\ (-1)^n\cos\frac{1}{3}\pi$ より

$n=1,2\cdots$

$$S_n=2\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\pi+1-(-1)^n\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore S_n=2\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\pi-\tfrac{1}{2}\cdot(-1)^n+1$$

(2)

$$V_n=\pi\int_0^{\alpha}y^2\,dx=\pi\int_0^{\alpha}(4+4\sin x+\sin^2x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\alpha}\left(4+4\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\pi\left[\frac{9}{2}x-4\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\alpha}$$

$$=\left(\frac{9}{2}\alpha-4\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin 2\alpha+4\right)\pi$$

$\frac{1}{4}\sin\frac{2}{3}\pi$

$$=\left\{\frac{9}{2}\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\pi+4-4\cos\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\pi-\frac{1}{4}\sin\left(2n+\tfrac{2}{3}\right)\pi\right\}\pi$$

$$=\left\{\frac{9}{2}\left(n+\tfrac{1}{3}\right)\pi+4-2(-1)^n-\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}\pi$$

(3) $S_n=\frac{1}{2}\left\{4\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-(-1)^n+2\right\}$ $\quad V_n=\frac{\pi}{8}\left\{36\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+32-16(-1)^n-\sqrt{3}\right\}$ とし

$$\frac{V_n}{S_n}=\frac{\frac{\pi}{8}\left\{36\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi+32-16(-1)^n-\sqrt{3}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{4\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi-(-1)^n+2\right\}}=\frac{\frac{\pi}{8}\left\{36\left(1+\frac{1}{3n}\right)\pi+\frac{32}{n}-16\frac{(-1)^n}{n}-\frac{\sqrt{3}}{n}\right\}}{\frac{1}{2}\left\{4\left(1+\frac{1}{3n}\right)\pi-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{n}\right\}}$$

となり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{S_n}=\frac{\frac{\pi}{8}\cdot 36}{\frac{1}{2}\cdot 4}=\frac{36}{16}\pi=\frac{9}{4}\pi$$

$$\therefore \frac{9}{4}\pi$$