3C 積分 26

2曲線 $y = ax^2$, $y = \log x$ が互いに接する。すなわち，共有点をもち，その共有点で共通の接線をもつものとする。ただし，対数は自然対数とし，e は自然対数の底とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 接点の座標を求めよ。

(3) 2曲線と y 軸および直線 $y = -1$ とによって囲まれた部分を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めなさい。

〔上智大改〕

(1) それぞれ微分すると

$y' = 2ax$, $y' = \frac{1}{x}$ で 接線の式を求めると，∵接点はそれぞれ

(t, at^2), $(t, \log t)$ とする

$y = 2at(x-t) + at^2 \rightarrow y = 2atx - at^2$

$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t \rightarrow y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$

これが一致することから　$2at = \frac{1}{t}$　$2at^2 = 1$　$at^2 = \frac{1}{2}$ …①

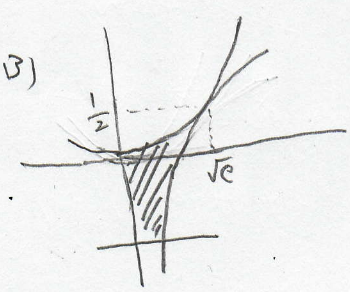
$-at^2 = \log t - 1$　①より これは $-\frac{1}{2} = \log t - 1$ となり　$\log t = \frac{1}{2}$

∴ $\log t = \log e^{\frac{1}{2}}$　従って $t = \sqrt{e}$ であるから　$a = \frac{1}{2e}$

(2)

(1)より $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$

(3)



$y = \frac{1}{2e}x^2$　$y = \log x$ より

$x = \sqrt{2ey}$　$x = e^y$ であるから 求める

体積は

$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (e^y)^2 \pi\, dy - \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2ey})^2 \pi\, dy$

$= \left[\frac{1}{2}\pi e^{2y}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \left[e\pi y^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{1}{2}\pi e - \frac{1}{2}\pi e^{-2}\right) - \frac{1}{4}e\pi$

$= \frac{1}{4}\pi e - \frac{1}{2}\pi e^{-2}$

よって体積は

$\left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{2}e^{-2}\right)\pi$