3C 積分27

$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ とおく。$f(x)$ が極大値をとる $x$ の値を $a$ とする。

(1) $a$ の値を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2}$, $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$ を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

〔大同工業大〕

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot\log x}{x^4}$　$\because x>0$

$=\dfrac{x-2x\log x}{x^4}=\dfrac{x(1-2\log x)}{x^4}$　$x>0$ より $f'(x)=0$ となる $x$ の値は

$1-2\log x=1-\log x^2=0$

$x^2=e$　$x=\pm\sqrt{e}$　$x>0$ より $x=\sqrt{e}$ のとき $f(x)$ は極値をとる 増減表を書くと左図のようになり

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | / | + | 0 | − |
| $f(x)$ | / | ↗ | | ↘ |

$x=\sqrt{e}$ で極大値をとる　$\therefore a=\sqrt{e}$

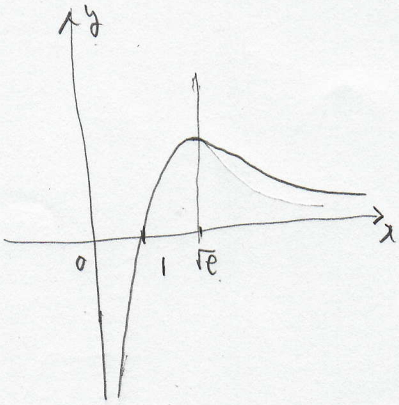
(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$ ($\because C$ は積分定数)

$\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx=\int\overset{g(x)}{\log x}\cdot\overset{f(x)}{\frac{1}{x^2}}\,dx=-\frac{\log x}{x}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=-\dfrac{\log x}{x}-\dfrac{1}{x}+C$

$\therefore\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx=-\frac{\log x+1}{x}+C$ ($\because C$ は積分定数)

(3)




グラフの概形をかくと左図のようになり 求める面積 S は

$S=\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx$

$=\left[-\dfrac{\log x+1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}=-\dfrac{\log\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}}+1$

$=-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}+1$

$\therefore -\dfrac{3}{2\sqrt{e}}+1$