3C積分28

曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ と曲線 $C_2 : y = \sqrt{x^2+2} - \dfrac{3}{2}$ の2つの交点の座標はそれぞれ $(\boxed{}, \boxed{})$ と $(\boxed{}, \boxed{})$ であり，すべての正の数 a に対し

$$\int_0^a \sqrt{x^2+2}\,dx = \boxed{} + \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

が成り立つことより，曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。　〔同志社大〕

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2} - \dfrac{3}{2}$ として

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ より $\dfrac{1}{x^2+2} - 2 + x^2+2 = \dfrac{9}{4}$ となるので

$\dfrac{(x^2+2)^2 - 2(x^2+2) + 1}{x^2+2} = \dfrac{9}{4}$, $4(x^2+2)^2 - 8(x^2+2) + 4 = 9(x^2+2)$

$4(x^2+2)^2 - 17(x^2+2) + 4 = 0$

$(x^2+2-4)(4x^2+8-1) = 0$

$(x^2-2)(4x^2+7) = 0$　$4x^2+7>0$ より $x^2=2$　$\therefore x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore$ 交点は $\underline{\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)}$

$\displaystyle\int_0^a \sqrt{x^2+2}\,dx = \int_0^a \overset{f'(x)}{1}\cdot\overset{g(x)}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ として部分積分を行うと

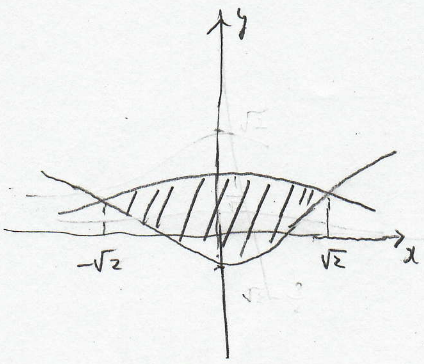
$\displaystyle\int_0^a \sqrt{x^2+2}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^a - \int_0^a \frac{x^2+2-2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$\displaystyle = a\sqrt{a^2+2} - \int_0^a \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx - 2\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$\displaystyle = a\sqrt{a^2+2} - \int_0^a \sqrt{x^2+2}\,dx - 2\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$\displaystyle 2\int_0^a \sqrt{x^2+2}\,dx = a\sqrt{a^2+2} - 2\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$　$\therefore$ $\underline{\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+2}}$

$\displaystyle \int_0^a \sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+2} - \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$



グラフの概略をかくと左図のようで

その面積Sはy軸について対称であるから

$$S = 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} + \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}\right)dx + 2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{3}{2}\,dx$$

(2)より

$$2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}\right)dx = -2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2+2}$$

$$= -2\sqrt{2}$$

また

$$2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{3}{2}\,dx = 2\left[\frac{3}{2}x\right]_0^{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

であるから

$$\therefore\ S = -2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$\underline{\sqrt{2}}$ //