3C積分30

$k \neq 0$ を定数とする。曲線 $C: y=(k-x)e^x$ について次の各問に答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $(a, (k-a)e^a)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) (1) の接線が原点を通るための k, a が満たすべき条件を求めよ。

(3) 曲線 C の接線で原点を通るものがただ一本であるときの k の値を k_0 とし，その接線を l とする。k_0 を求め，l の方程式を求めよ。

(4) (3) で得られる曲線 $C: y=(k_0-x)e^x$ の概形を描け。

(5) y 軸と (3) で得られる曲線 C と接線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔同志社大〕

(1) $y'=-e^x+(k-x)e^x=(k-1-x)e^x$ となるので 点における接線の式は

$\underline{y=(k-1-a)e^a(x-a)+(k-a)e^a}$ → $y=(k-1-a)e^a x+(a^2-ka+k)e^a$

の方がよいかも

(2) (1)の式で $x=y=0$ とすると

$0=-a(k-1-a)e^a+(k-a)e^a$　　$e^a>0$ より

$-a(k-1-a)+k-a=0$　　$\underline{a^2-ka+k=0}$

$-ka+a+a^2+k-a=0$

(3) (2)の a についての方程式が重解をもつことが条件になる

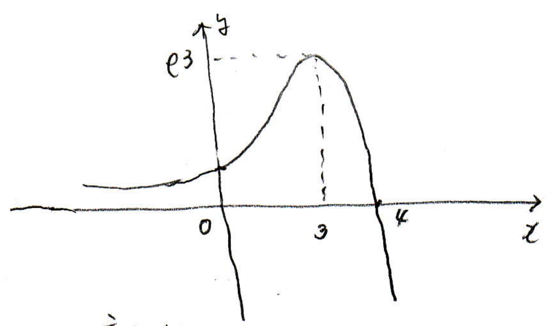
判別式 $D=0$ とすると　$a^2k^2-4a^2k=0$ より　$a^2k(k-4)=0$

$k\neq 0$ より　$k=4$　つまり　$k_0=4$　このとき $(a-2)^2=0$ で $a=2$ となる

従って接線の式は　$y=e^2(x-2)+2e^2$　　$\therefore$ $\underline{l\ \ y=e^2x\quad k_0=4}$

(4) $C: y=(4-x)e^x$　$y'=(3-x)e^x$　$y''=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$

x	…	2	…	3	…
$f'(x)$	+		+	0	−
$f''(x)$	+	0	−		−
$f(x)$	↗	$2e^2$	↗	e^3	↘

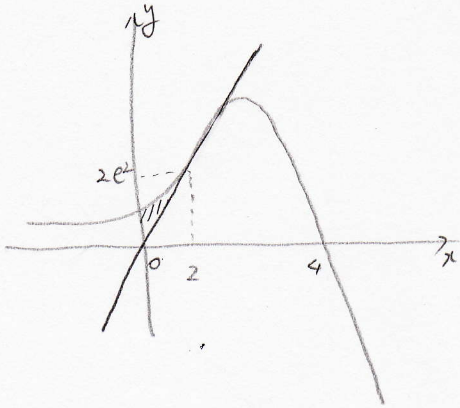


変曲点は $(2, 2e^2)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

(5)



求める面積Sは

$$S = \int_0^2 \{(4-x)e^x - e^2 x\}\,dx$$

$$= \int_0^2 (4-x)e^x - \int_0^2 e^2 x\,dx$$

ここで

$$\int_0^2 \overset{g(x)}{(4-x)}\,\overset{f(x)}{e^x}\,dx$$

$$= \left[e^x(4-x)\right]_0^2 - \int_0^2 e^x \cdot (-1)\,dx$$

$$= \left[e^x(4-x)\right]_0^2 + \left[e^x\right]_0^2$$

$$= 2e^2 - 4 + e^2 - 1$$

$$= 3e^2 - 5$$

$$\int_0^2 e^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^2 x^2\right]_0^2 = 2e^2$$

$$\therefore \quad S = 3e^2 - 5 - 2e^2$$

つまり $\underline{e^2 - 5}$

ごうかく!