3C積分31

曲線 $C : y = \log x$ がある。ただし, $\log x$ は自然対数とし, 以下 e は自然対数の底とする。

(1) 原点から曲線 C へ接線 l を引くとき, 接点の y 座標を求めよ。

(2) 曲線 C, 接線 l および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めなさい。

(3) 曲線 C, 接線 l および x 軸で囲まれる部分を, x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 V を求めなさい。

〔獨協医科大改〕

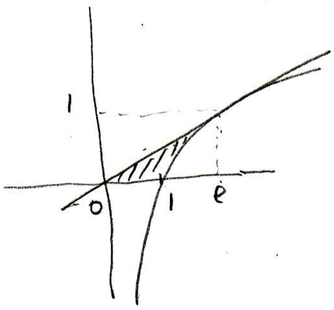
(1) $y' = \frac{1}{x}$ 接点を $(t, \log t)$ とすると ~~接線~~ l は

$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t \rightarrow y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$

原点を通ることから $\log t - 1 = 0$ $\therefore \log t = 1$ $\therefore t = e$

ゆえに 接点の y 座標は 1 である

(2)



求める面積をSとすると

$S = \int_0^e \frac{1}{e}x\,dx - \int_1^e \log x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e - \left[x\log x - x\right]_1^e$

$= \frac{e}{2} - \{(e - e) - (-1)\}$

$= \frac{e}{2} - 1$ $\therefore \frac{e}{2} - 1$

(3)

$\pi\int_0^e \left(\frac{1}{e}x\right)^2 dx - \pi\int_1^e (\log x)^2 dx$ $\int 1\cdot(\log x)^2 = x(\log)^2 - \int x\, 2\log x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \pi\left[\frac{1}{3e^2}x^3\right]_0^e - \pi\left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right]_1^e$ $= x(\log)^2 - 2(x\log x - x) + C$ より

$= \frac{e}{3}\pi - \pi\{(e - 2e + 2e) - 2\}$

$= \frac{e}{3}\pi - e\pi + 2\pi$

$= 2\pi - \frac{2}{3}e\pi$

$\therefore 2\pi - \frac{2}{3}e\pi$