3C積分32

関数 $f(x) = (a^2x - 2a)e^{ax}$ について, 次の問に答えよ。ただし, $a > 0$ とする。

(1) $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 積分 $S(a) = \int_0^a f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) a が $a > 0$ の範囲を動くとき, $S(a)$ の最小値を求めよ。

〔青山学院大〕

(1)

$f'(x) = a^2 e^{ax} + a(a^2x - 2a)e^{ax}$

$= e^{ax}(a^3x - a^2)$

$= a^2e^{ax}(ax - 1)$　　$a^2e^{ax} > 0$ より

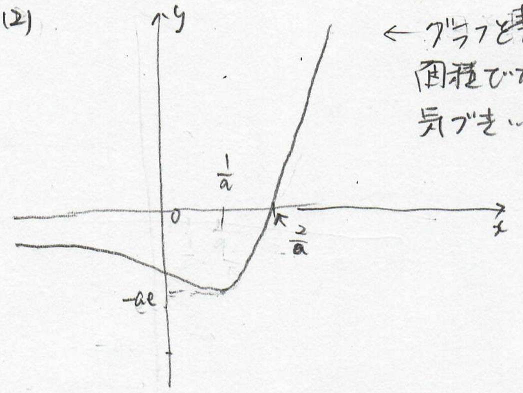
$ax = 1$ のとき すなわち $x = \frac{1}{a}$ のとき極値をとる

それは増減表より極小値で その値は $-ae$

x	…	$\frac{1}{a}$	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-ae$	↗

∴ $\underline{-ae}$

(2)



← グラフを書いたが面積でないことに気づきやめ

$S(a) = \int_0^a \underbrace{a(ax-2)}_{g(x)} \overbrace{e^{ax}}^{f'(x)}$

$= \left[\frac{1}{a}e^{ax} \cdot a(ax-2)\right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{a}e^{ax}a^2\,dx$

$= \left[e^{ax}(ax-2)\right]_0^a - \left[e^{ax}\right]_0^a$

$= e^{a^2}(a^2-2) - (-2) - (e^{a^2} - 1)$

$= a^2e^{a^2} - 2e^{a^2} + 2 - e^{a^2} + 1$

∴ $\underline{S(a) = a^2e^{a^2} - 3e^{a^2} + 3}$

(3) $S(a) = e^{a^2}(a^2 - 3) + 3$ として

$S'(a) = 2ae^{a^2}(a^2-3) + 2ae^{a^2}$

$= 2ae^{a^2}(a^2 - 2)$　　$2ae^{a^2} > 0$ より

$a = \pm\sqrt{2}$ で極値をとる $a > 0$ で増減表をかくと

a	…	$\sqrt{2}$	…
$S'(a)$	$-$	0	$+$
$S(a)$	↘	極小	↗

よって 最小値は $x = \sqrt{2}$ のときで その値は

$\underline{-e^2 + 3}$