3C 積分33

a, bを実数とし，関数 $y=e^{a+bx^2}$ のグラフをCとする。

(1) Cが点$\mathrm{P}(1,\ 1)$を通り，PでのCの接線の傾きが-2となるa, bを求めよ。

(2) a, bが(1)で求めた値であるとき，放物線$y=x^2$と曲線Cとで囲まれた図形のうちy軸の右側にある部分をy軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ。

〔学習院大〕

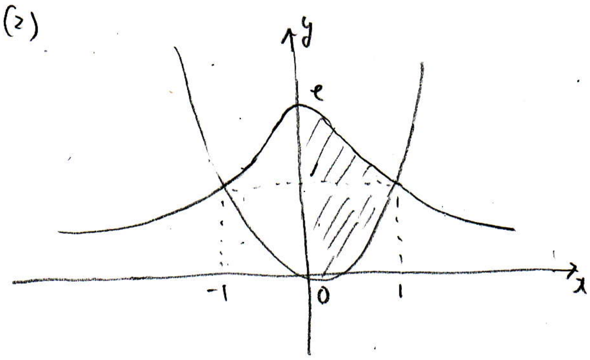
(1) $f(x)=e^{a+bx^2}$とおく　$f(1)=1$ より　$e^{a+b}=1$

$\therefore\ a+b=0$　つまり　$b=-a$ である　これより

$f(x)=e^{a-ax^2}$と書きかえ　$f'(x)$を求めると　$f'(x)=-2ax\,e^{a-ax^2}$

$f'(1)=-2$ より　$-2a=-2$　$a=1$　$\therefore\ b=-1$　$\underline{a=1,\ b=-1}$

(2)



(1)より

$f(x)=e^{1-x^2}$

$f'(x)=-2x\,e^{1-x^2}$　$x=0$で極大値eをとる

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e	$\searrow$

$y=e^{1-x^2}$と$y=x^2$の交点を求めると

$x^2=e^{1-x^2}$ より　$2\log x=1-x^2$　$x^2+2\log x-1=0$　$x=\pm1$

よって交点は$(-1,1)(1,1)$になる

求める体積は　$\log y=1-x^2$　$x^2=1-\log y$ であるから

$$\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^e(1-\log y)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1+\pi\left[y\right]_1^e-\pi\left[y\log y-y\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\pi+e\pi-\pi-\pi\{(e-e)-(0-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\pi+e\pi-2\pi$$

$$=e\pi-\frac{3}{2}\pi$$

$\therefore\ \underline{\left(e-\frac{3}{2}\right)\pi}$