3C 積分34

直線 $l : y = x - 1$ と曲線 $C : y^2 = -x + 3$ がある。このとき, l と C の交点の座標は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ であり, l と C で囲まれた図形 D の面積は $\boxed{}$ である。また, D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は $\boxed{}$ である。〔北里大〕

l と C より

$(x-1)^2 = -x+3$

$x^2 - 2x + 1 = -x + 3$

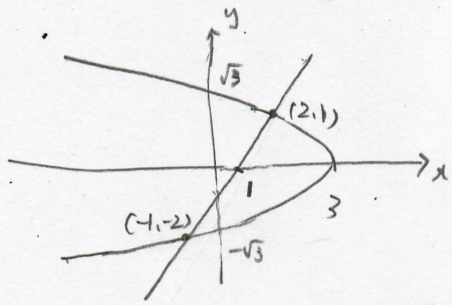
$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

よって交点の座標は

$(2, 1)$ $(-1, -2)$

$x = -y^2 + 3$ $\quad$ $x = y + 1$

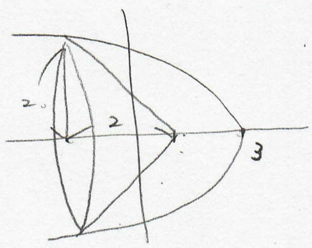


$D = \int_{-1}^{2} \{(-y^2+3) - (y+1)\} dy$

$= \left[-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{-1}^{2}$

$= \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)$

$= \frac{9}{2}$ $\qquad$ ∴ D の面積は $\frac{9}{2}$



求める体積は

$\pi \int_{-1}^{3} y^2 dx - 2 \times 2 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{3}$

$= \pi \int_{-1}^{3} (-x+3) dx - \frac{8}{3}\pi$

$= \pi \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} - \frac{8}{3}\pi$

$= \pi \left\{\left(-\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-\frac{1}{2} - 3\right)\right\} - \frac{8}{3}\pi$

$= 8\pi - \frac{8}{3}\pi$

$= \frac{16}{3}\pi$ $\qquad$ $\frac{16}{3}\pi$