$x=\cos t,\ y=\sin 2t\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える。このとき, 次の問に答えよ。

(1) $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき, y を x の関数として表せ。

(2) t が $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, (1) で求めた関数を $f(x)$ とする。$y=f(x)$ の増減を調べ, グラフをかけ。

(3) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔東京電機大〕

(1) $y=\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}$

$x=\cos t$ より $\quad y=2x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(2) $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ とおく, $f(x)=2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ なので

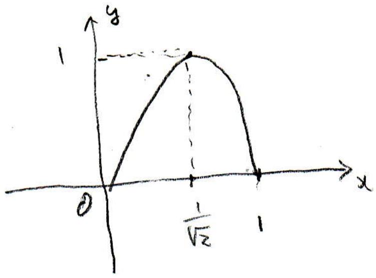
$f'(x)=2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+x\cdot -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$=2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$ とすると $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 0 \leqq x < 1$ なのでそれに気をつけて

増減表をかくと

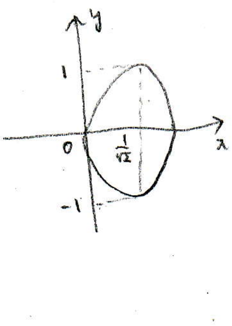
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で極大値 1 をとる

(3) 曲線 C は $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ であるから上で求めていない $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq 0$ について考えると

$x=\cos t \quad y=-\sin 2t$ となる. つまり 曲線 C は左下図のようなので求める面積は



$2\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{4}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=-\frac{4}{3}(0-1)=\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}$