$x>0$ で定義された2つの関数 $f(x)=\log x$ と $g(x)=(\log x)^2$ について以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ は単調増加であり, そのグラフには変曲点がないことを示せ。

(2) $y=g(x)$ の増減, 凹凸を調べ, そのグラフをかけ。

$y=g(x)$ が最小値をとるときの x の値を a とし, $y=g(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を b とする。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸, および直線 $x=b$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 曲線 $y=g(x)$ と x 軸, および2直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔中央大〕

(1)
$f'(x)=\dfrac{1}{x}$　$x>0$ であるから $f'(x)>0$ となり単調増加である

また $f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ となり $x>0$ より $f''(x)<0$ であり $f''(x)=0$ となる x も存在しない。

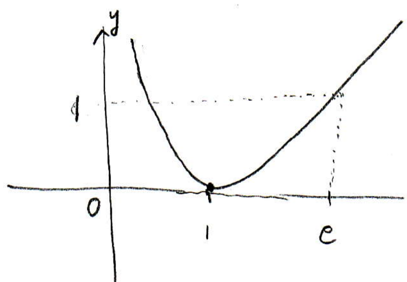
よって変曲点をもたない

(2)
$g(x)'=2\dfrac{1}{x}\log x=\dfrac{2\log x}{x}$　　$g'(x)=0$ となる x は $x=1$

$g''(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\cdot x-1\cdot 2\log x}{x^2}=\dfrac{2-2\log x}{x^2}$　　$g''(x)=0$ となる x は $x=e$

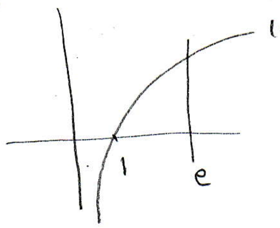
これより増減表をかくと

x	0	…	1	…	e	…
$g'(x)$		−	0	+	+	+
$g''(x)$		+	+	+	0	−
$g(x)$		↘	0	↗	1	↗



$g(x)$ は $x=1$ で極小値をとりその値は0　変曲点の座標は $(e,1)$ である

(3)

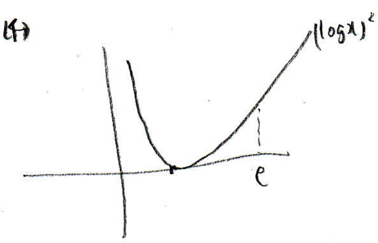


(2)より $a=1$　$b=e$ である　よって求める面積は

$\displaystyle\int_1^e \log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^e$

$=(e-e)-(0-1)=1$　　　(3) $\underline{1}$

(4)



$\displaystyle\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int x\cdot 2\cdot\frac{1}{x}\log x\,dx$

$=x(\log x)^2-2[x\log x-x]$

$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$　（∵ C は積分定数）

よって $\displaystyle\int_1^e(\log x)^2dx=\Big[x(\log x)^2-2x\log x+2x\Big]_1^e$

$=(e-2e+2e)-(0-0+2)$

$=e-2$　　　(4) $\underline{e-2}$