



30 種合 38



関数 $f(x) = (3x - a)e^{-x}$ について、次の各問に答えよ。

- (1) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(2, f(2))$ における接線が原点を通るとき、定数 a の値を求めよ。
- (3) (2) のとき、不定積分 $I = \int f(x) dx$ を求めよ。
- (4) (2) のとき、この曲線と (2) の接線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[成蹊大]

01

$$f'(x) = 3e^{-x} - (3x - a)e^{-x} = (-3x + a + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = -3e^{-x} + (3x - a - 3)e^{-x} = (3x - a - 6)e^{-x}$$

$$\therefore \underline{f'(2) = (-3 \cdot 2 + a + 3)e^{-2}, f''(2) = (3 \cdot 2 - a - 6)e^{-2}}$$

02 点 $(2, f(2))$ における接線の式は

$$y = (a - 3)e^{-2}(x - 2) + (6 - a)e^{-2} \quad \text{この直線が原点を通るとから}$$

$$0 = -2(a - 3)e^{-2} + (6 - a)e^{-2} \quad e^{-2} \neq 0 \text{ より}$$

$$-2a + 6 + 6 - a = 0 \quad \therefore -3a = -12 \quad \underline{\underline{a = 4}}$$

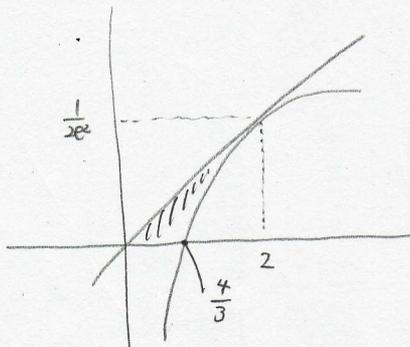
03

$$f(x) = (3x - 4)e^{-x}$$

$$\int (3x - 4)e^{-x} dx = -\int (3x - 4)e^{-x} dx + \int 3e^{-x} dx = -(3x - 4)e^{-x} - 3e^{-x}$$

$$\int f(x) dx = (-3x + 1)e^{-x} + C \quad (\because C \text{ は積分定数})$$

04



04 の接線の式は

$$y = e^{-2}(x - 2) + 2e^{-2} \quad \text{よって } y = \frac{1}{2e^2}x$$

$$\text{よって } f(x) \text{ との交点 } (2, f(2)) = (2, \frac{1}{2e^2})$$

求める面積は

$$\int_0^2 e^{-2}x dx - \int_{\frac{4}{3}}^2 f(x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-2}x^2 \right]_0^2 - \left[(-3x + 1)e^{-x} \right]_{\frac{4}{3}}^2$$

$$= 2e^{-2} - \{ (-5e^{-2}) - (-3e^{-\frac{4}{3}}) \}$$

$$= 17e^{-2} - 3e^{-\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \underline{\underline{17e^{-2} - 3e^{-\frac{4}{3}}}}$$

