3C セキ分39　　　27 正24

a を正の実数とする。座標平面において, 点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ を通り, 放物線 $y = x^2$ 上のある点における法線となるような直線の本数を n と表す。

(1) 本数 n を求めよ。

(2) $n = 2$ となるように a を定め, 点 P を通る 2 本の法線のうち, 傾きが大きい直線を l と表す。直線 l と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

〔早稲田大〕

(1) $y' = 2x$ より　$y = x^2$ 上の点を (t, t^2) とすると法線は

$$y = -\frac{1}{2t}(x - t) + t^2$$ となりこれが (a, a^2) を通ることから

$$a^2 = -\frac{1}{2t}(a - t) + t^2$$

$$-2a^2 t = a - t - 2t^3$$

$$2t^3 - (2a^2 - 1)t - a = 0$$

$$(t - a)(2t^2 + 2at + 1) = 0$$

ここで $2t^2 + 2at + 1$ に $t = a$ を代入すると

$4a^2 + 1$ となりこれは 0 ではない. 従って

$t = a$ を解にもたないことから、これを判別式 D を用いて. 解の個数を調べると

$D = 4a^2 - 8 = 4(a^2 - 2)$ となり　$a > 0$ であるから

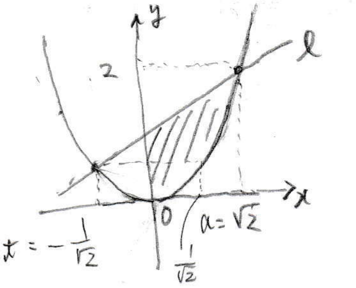
$D > 0$ つまり　$a > \sqrt{2}$　のとき　$n = 3$

$D = 0$ つまり　$a = \sqrt{2}$　のとき $n = 2$

$D < 0$ つまり　$0 < a < \sqrt{2}$　のとき　$n = 1$

(2) $n = 2$ つまり $a = \sqrt{2}$ のとき

$(t - \sqrt{2})(2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0$ となり　$t = \sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$



法線の傾きを調べると　$t = \sqrt{2}$ のとき $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $\frac{\sqrt{2}}{2}$

であるから $l : y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}$

$$\underline{y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1}$$

このとき左図において l と $y = x^2$ の $x < 0$ の部分は $x \geqq 0$ の部分に吸収される

∴ 求める体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^2 x^2\,dy - \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2})^2 = \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 - \frac{2}{3}\pi$$

$$= 2\pi - \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

ミてZ

$$\underline{\frac{4}{3}\pi}_{\ //}$$