自然数 n に対して $I_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx$ とする。ただし, 対数は自然対数であり, e は自然対数の底である。

(1) I_1 の値を求めよ。

(2) I_{n+1} と I_n の関係式を求めよ。

(3) 定積分 $\int_1^{\sqrt{e}} x(\log x^2)^4\,dx$ の値を求めよ。

〔岩手大〕

(1)

$$I_1 = \int_1^e \log x\,dx$$
$$= \left[x\log x - x\right]_1^e$$
$$= (e-e)-(0-1)$$
$$= 1$$

(2)

$$I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1}\,dx$$
$$= \left[x(\log x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e x(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n\,dx$$

$I_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx$ より

$$I_{n+1} = e-(n+1)I_n$$

(3)

$\int_1^{\sqrt{e}} x(\log x^2)^4\,dx$ 　$x^2 = t$ とおくと $2x\,dx = dt$

$dx = \frac{1}{2x}dt$ より

$$\int_1^{\sqrt{e}} x(\log x^2)^4\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} x(\log t)^4\frac{1}{2x}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{e}}(\log t)^4\,dt \quad \cdots ①$$

$$I_2 = \int_1^e (\log x)^2\,dx = e-2$$
$$I_3 = \int_1^e (\log x)^3\,dx = e-3I_2 = e-3(e-2) = -2e+6$$
$$I_4 = \int_1^e (\log x)^4\,dx = e-4I_3 = e-4(-2e+6) = 9e-24 \quad \cdots ②$$

①②より

$$\int_1^{\sqrt{e}} x(\log x^2)^4\,dx = \frac{1}{2}(9e-24)$$