

(1) 定積分 $\int_0^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx$ を求めよ。

(2) a は実数全体を動くとする。 $\int_0^\pi (\pi - x - a \sin nx)^2 \, dx$ の最小値を求め、そのときの a の値も求めよ。

[群馬大]

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{与式} &= \left[(\pi - x) \cdot -\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \\ &= \frac{\pi}{n} - \frac{1}{n^2} \left[\sin nx \right]_0^\pi = \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{与式} &= \int_0^\pi (\pi - x)^2 - 2a \int_0^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx + a^2 \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} (\pi - x)^3 \right]_0^\pi - 2a \cdot \frac{\pi}{n} + \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx) \, dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{n} a + \frac{a^2}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{n} a + \frac{a^2}{2} \pi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{2}{n} \right)^2 - \frac{2\pi}{n^2} + \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{2}{n} \text{ のとき } \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{n^2} \text{ となる}$$