

(1) 次の式が x についての恒等式になるように a, b, c の値を定めよ。

$$\frac{x+2}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

(2) 不定積分 $\int \frac{x+2}{x(x+1)^2} dx$ を求めよ。

①) 命題をくらべると

[日本大]

$$a(x+1)^2 + b x(x+1) + c x = x+2$$

$$a(x^2+2x+1) + b x^2 + b x + c x = x+2$$

$$ax^2 + 2ax + a + bx^2 + bx + cx = x+2$$

$$(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a = x+2 \quad \therefore a+b=0, 2a+b+c=1, a=2$$

$$\therefore a=2, b=-2, c=-1$$

②) ①より

$$\text{与式は} \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$$

$$= 2 \log x - 2 \log(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \log x^2 - \log(x+1)^2 + \frac{1}{x+1} + C$$

$$\log \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \frac{1}{x+1} + C$$