3e e 対分 6

曲線 $C : y = (2x + 1)e^x$ に関して次の問いに答えなさい。

(1) y の導関数 y' を求めなさい。

(2) 原点 $(0, 0)$ から C に引いた 2 本の接線の方程式を求めなさい。

(3) (2) で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めなさい。

〔城西大〕

(1)

$y' = 2e^x + (2x+1)e^x$

$y' = (2x+3)e^x$

(2) 接点を $(t, (2t+1)e^t)$ とすると (1) より

$$y = (2t+3)e^t(x-t) + (2t+1)e^t$$
$$= (2t+3)e^t x - t(2t+3)e^t + (2t+1)e^t$$
$$= (2t+3)e^t x - (2t^2+t-1)e^t$$

となり これが原点を通ることを $e^t > 0$ であることから

$2t^2+t-1=0 \rightarrow (t+1)(2t-1)=0 \quad t=-1, \frac{1}{2}$

で このとき 接線はそれぞれ

$y = \frac{1}{e}x, \quad y = 4\sqrt{e}\,x$

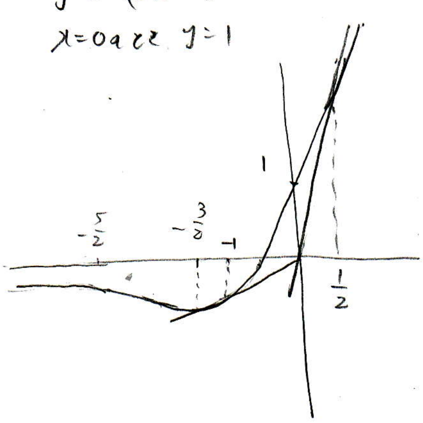
(3) $\lim_{x\to\infty}(2x+1)e^x = \infty$

$\lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^x = 0$

$y'' = (2x+5)e^x$

$x=0$ のとき $y=1$

$x=-\frac{3}{2}$ のとき $y=-2e^{-\frac{3}{2}}$



求める面積は

$$\int_{-1}^{0}\left\{(2x+1)e^x - \frac{1}{e}x\right\}dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left\{(2x+1)e^x - 4\sqrt{e}\,x\right\}dx$$
$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left\{(2x+1)e^x\right\}dx - \int_{-1}^{0}\frac{1}{e}x\,dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}}4\sqrt{e}\,x\,dx$$
$$= \Big[(2x+1)e^x\Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} - 2\int_{-1}^{\frac{1}{2}}e^x dx - \frac{1}{e}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - 4\sqrt{e}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2e^{\frac{1}{2}} + e^{-1} - 2(e^{\frac{1}{2}} - e^{-1}) + \frac{1}{2e} - \frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$= 3e^{-1} + \frac{1}{2e} - \frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$= \frac{7}{2e} - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$\frac{7}{2e} - \frac{\sqrt{e}}{2}$