3C積分68

(1) $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数のとき, 次の等式を証明せよ。

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx$ の値を求めよ。　　［都立大］

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ では　$0 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから　$xf(\sin x)$ や $f(\sin x)$ は連続関数である

$x = \pi - t$ とおくと　$x : 0 \to \pi$　$t : \pi \to 0$　$dx = -dt$

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t)\cdot(-dt)$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt - \int_0^\pi t f(\sin t)\,dt$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx - \underbrace{\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx}_{\text{左辺}}$$

$$2\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

$\therefore$ $\displaystyle\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ が成り立つ

(2) (1)より

$$\text{与式} = \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx \cdots①$$

として $\cos x = t$ とおくと　$-\sin x\,dx = dt$　$x : 0 \to \pi$　$t : 1 \to -1$

より

$$① = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{4-t^2}(-dt) = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{4-t^2}\,dt = \frac{\pi}{8}\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right)dt$$

$$= \frac{\pi}{8}\Big[\log|2-t| + \log|2+t|\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{8}\Big[\log|2-t||2+t|\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{8}(\log 3 + \log 3)$$

$$= \frac{\pi}{4}\log 3$$